

Olimpiada Națională de Matematică  
Etapă locală a județului Alba, 13 februarie 2015

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VII-a**

**Problema 1.** Se consideră numărul real  $x = \frac{3+a\sqrt{18}}{2+b\sqrt{32}}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere raționale.

- a) Arătați că dacă  $a = 6$  și  $b = 3$ , atunci  $x$  este număr rațional.  
b) Dacă  $x \in \mathbb{Q}$ , arătați că  $a = 2b$ .

**Soluție.** a)  $x = \frac{3+6\sqrt{18}}{2+3\sqrt{32}} = \frac{3+18\sqrt{2}}{2+12\sqrt{2}}$  ..... 1 punct  
 $x = \frac{3 \cdot (1+6\sqrt{2})}{2 \cdot (1+6\sqrt{2})}$  ..... 1 punct  
 $x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$  ..... 1 punct  
b)  $x = \frac{3+3a\sqrt{2}}{2+4b\sqrt{2}} \Leftrightarrow x(2+4b\sqrt{2}) = 3+3a\sqrt{2}$  ..... 1 punct  
 $2x+4bx\sqrt{2} = 3+3a\sqrt{2}$  ..... 1 punct  
 $2x = 3$  și  $4bx = 3a$  ..... 1 punct  
 $a = 2b$  ..... 1 punct

**Problema 2.** Arătați că dacă  $a, b$  și  $c$  sunt cifre nenule ce reprezintă lungimile laturilor unui triunghi și

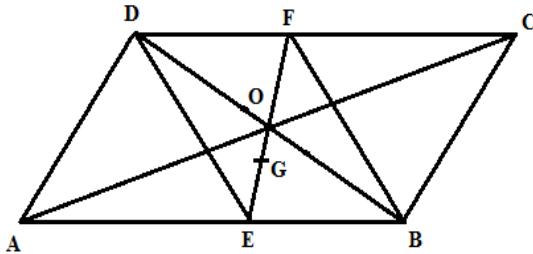
$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ab0}+\overline{ac}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bc0}+\overline{ba}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{ca0}+\overline{cb}}, \text{ atunci triunghiul este echilateral.}$$

**Soluție.**  $\frac{10a+b}{110a+10b+c} = \frac{10b+c}{110b+10c+a} = \frac{10c+a}{110c+10a+b}$  ..... 2 puncte  
 $\frac{10a+b}{110a+10b+c} = \frac{10b+c}{110b+10c+a} = \frac{10c+a}{110c+10a+b} = \frac{11(a+b+c)}{121(a+b+c)} = \frac{1}{11}$  ..... 2 puncte  
 $110a+11b = 110a+10b+c$  ..... 1 punct  
 $b = c$  ..... 1 punct  
Analog  $c = a \Rightarrow a = b = c \Rightarrow$  triunghi echilateral ..... 1 punct

**Problema 3.** Pe laturile paralelogramului  $ABCD$  ( $m(\angle A) < 90^\circ$ ,  $AB > BC$ ) se iau punctele  $E \in (AB)$ ,  $F \in (DC)$ , astfel încât  $EA = ED$  și  $FC = FB$ .

- Demonstrați că patrulaterul  $DEBF$  este paralelogram.
- Dacă  $G \in (EF)$  astfel încât  $2EG = GF$ , demonstrați că punctul  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $AEC$ .

**Soluție.**



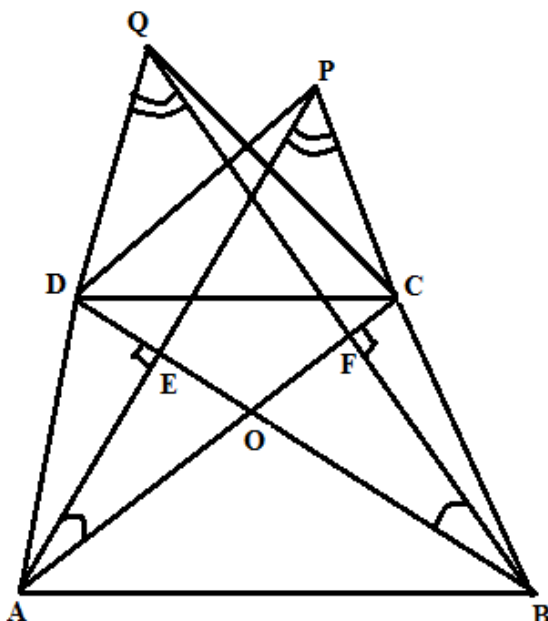
- $\triangle EAD \equiv \triangle FBC$  (ULU) ..... 2 puncte  
 $\Rightarrow EA = ED = FB = FC$  ..... 1 punct  
 $DF = EB$ ,  $DF \parallel EB \Rightarrow DEBF$ -paralelogram ... 1 p
- $\{O\} = AC \cap BD \cap EF$  ..... 1 punct  
 $AO = OC$ ;  $EO = OF$  ..... 1 punct  
 $EG = 2GO \Rightarrow G$  centrul de greutate al triunghiului  $AEC$  ..... 1 punct

**Problema 4.** Fie  $ABCD$  un trapez astfel încât  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Considerăm, în plus, că  $P$  este simetricul lui  $A$  față de  $DO$ ,  $AP \cap DO = \{E\}$  și  $Q$  este simetricul lui  $B$  față de  $CO$ ,  $BQ \cap CO = \{F\}$ . Demonstrați că:

- $\angle OAE \equiv \angle OBF$ ;
- $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC}$ ;
- $AE \cdot BD = BF \cdot AC$ ;
- $\angle APC \equiv \angle BQD$ .

*Gazeta Matematică 1/2015(prelucrare)*

**Soluție.**



- $\angle OAE \equiv \angle OBF$ (au același complement) ..... 1 punct
- $d(D, AB) = d(C, AB) \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DAB}$  ..... 2 puncte
- $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC} \Rightarrow AE \cdot BD = BF \cdot AC$  ..... 2 puncte
- $2 \cdot | AE \cdot BD = BF \cdot AC \Rightarrow AP \cdot BD = BQ \cdot AC$  .1punct  
 $\triangle APC \sim \triangle BQD$ (LUL)  $\Rightarrow \angle APC \equiv \angle BQD$  ..... 1punct